**ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

Кафедра компьютерных технологий

**Инструкции и методические указания   
к выполнению лабораторных работ**

«Вычислительная математика»

|  |  |
| --- | --- |
| **Направление подготовки:** | *- 09.03.01 - Информатика и вычислительная техника*. |
| **Профили подготовки:** | *- Программирование информационных систем;  Администрирование информационных систем;  Информационные технологии в дизайне.* |
| **Квалификация (степень) выпускника:** | *- Академический бакалавр.* |
| **Формы контроля** | 1 модульный контроль, экзамен |
| **Форма обучения:** | *- дневная, ускоренная* |

Донецк 2020

Общие указания

Некоторые лабораторные работы могут реализовываться либо посредством программирования поставленных в инструкциях задач, либо в виде упрощённых письменных работ, варианты заданий которых выдаются и сразу же выполняются в лабораториях кафедры. Программирование может осуществляться в любых средах, с использованием любых пакетов и библиотек.

Примерные тексты заданий имеются в [программе дисциплины](http://tolstykh.com/docs/%D0%A3%D1%87%D0%B5%D0%B1%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8B/%D0%92%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B0%20-%20%D0%92%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.docx) и соответствуют модульным и экзаменационным заданиям. В любом случае студент должен знать ответы на все контрольные вопросы, приведенные в конце указаний к каждой лабораторной работе.

Таким образом, к лабораторным работам, контрольным вопросам надо готовиться заранее дома, а в лабораториях выяснять свои вопросы, консультироваться и сдавать работы.

Если студент выбрал путь «непрограммирования», то он может претендовать не более чем на 70% от баллов, указанных в критериях оценки лабораторной работы.

Те студенты, которые программирует работы, используют сторонние коды блоков для своей программы должны оформлять отчет:

* Краткое описание задания, согласно конкретному варианту;
* Описание преобразований исходного задания к математическим выражениям, которые непосредственно вычисляются, программируются;
* Исходный код программы и полученные результаты в наглядном виде (таблицы, рисунки),
* Выводы о проделанной работе (получен ли результат, можно ли ему доверять, какой метод/алгоритм лучше и почему).

**Вычисления с плавающей точкой***(Обязательно всеми программируется)*

* 1. Определить машинный  и машинную бесконечность для стандартной и повышенной точности вычислений с вещественными числами. Соответствуют ли полученные значения действительности?
  2. Ряд Тейлора для функции ошибок имеет вид:



Этот ряд сходится для всех *x*.

Вычислить erf(3) по указанной формуле с точно­стью до нулевого члена ряда для следующих случаев:

* Без преобразований исходной формулы;
* Сделать расчёт факториала с числом *n* целого типа,
* Сделать расчёт факториала сделать с числом *n* вещественного типа.
* Повторить расчеты, изменив формулу функции ошибок с вычислением очередного члена ряда через предыдущий член *an=kan*-1, т.е. найти *k* и таким образом избавиться от факториала.

Объяснить все четыре полученных результата. Каким знакам (цифрам) в результате erf(3) доверять нельзя? Была ли катастрофическая потеря верных знаков? В каких знаках делались округления?

***Контрольные вопросы***

1. Какова причина возникновения округлений при работе с вещественными числами?
2. Что такое «катастрофическая потеря верных знаков»?
3. Что такое и как проявляют себя исчезновение и переполнение вещественных чисел?
4. Изобразите шкалу вещественных чисел компьютера на отрезке [0,15].
5. Что такое накопление вычислительных погрешностей? Напишите пример алгоритма, накапливающего вычислительные погрешности.
6. Что такое чувствительность решения задачи к её параметрам, и к чему может приводить высокая чувствительность отдельных параметров?

**Решение системы линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента**

Для тех, кто программирует, необходимо написать программу метода Гаусса для решения системы *n* линейных уравнений *Ax*=*f*. Продемонстрировать её работоспособность на примере решения системы линейных уравнений с матрицей Гильберта *A*, элементы которой *aij* =1/(*i*+*j*-1), *i*,*j*=1.. *n*. Свободный член системы уравнений задайте в виде *fi* = *n*/*i2*. Проведите расчёты без выбора и с выбором главного элемента матрицы. Можно взять в Internet сторонние коды метода Гаусса и модифицировать их под поставленную задачу.

Для тех, кто не программирует, сделайте соответствующее расчётное задание с преподавателем в лаборатории.

Всем, кто программирует и не программирует, необходимо найти число обусловленности рассматриваемой матрицы – Cond(*A*)=||*A*||·||*A*-1||. Это можно сделать в сторонних приложениях: MathCad, [wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) …

Размерность *n* для системы уравнений возьмите в соответствии с вашим номером в списке группы и добавьте к нему цифру 3.

Сделайте выводы из всех полученных результатов.

***Контрольные вопросы***

1. Каков порядок количества вычислений с вещественными числами в методах решения линейных систем *n* уравнений: методом Крамера, методом Гаусса, методом прогонки?
2. Что такое главный (ведущий) элемент в методе Гаусса? Как он вычисляется?
3. Как методом Гаусса находят обратные матрицы?
4. Что такое хорошо обусловленная матрица? Каковы пределы обусловленности?
5. Какой матрицей должна характеризоваться система линейных уравнений для решения её методом прогонки?
6. В чём суть итерационных методов решения систем линейных уравнений?

**Восстановление дискретно заданной функций**

При получении задания необходимо заполнить табличные значения некоторой заранее неизвестной функции. Восстановить функцию и построить её график:

1. Для тех, кто программирует, сделать интерполяцию кубическими сплайнами;
2. Всем, кто программирует и не программирует, сделать интерполяцию полиномом в форме Лагранжа. Можно сделать через **WolframAlpha** (смотрите [wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha\_23.html](http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha_23.html));
3. Всем сделать приближение (аппроксимация, регрессия) методом наименьших квадратов с помощью **WolframAlpha** (смотрите <http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha_18.html>). Опробовать несколько типов аппроксимаций (регрессионных моделей), оценить их качество по коэффициенту детерминации. Для интерпретации результатов регрессий читайте материал [wiki/Коэффициент\_детерминации](ru.wikipedia.org/wiki/Коэффициент_детерминации).

Сделать выводы о качестве, преимуществах и недостатках использованных методов восстановления дискретно заданной функции.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *f* | 0.6 | 2.3 | 2.1 | 3.5 | 4.2 | 6.0 | 7.8 | 9.2 |
|  | *x* | Этот лист заданий заполняется студентами и остаётся у преподавателя | | | | | | | |
| *f* |
| 2 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6 | *x* |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *f* |  |  |  |  |  |  |  |  |

***Контрольные вопросы***

1. Что такое интерполяция, экстраполяция?
2. Что называется, условием интерполирования? Напишите его.
3. Какой вид имеет алгебраический интерполяционный многочлен в форме Лагранжа?
4. Что такое сплайн? Какой вид имеет кубический интерполяционный сплайн?
5. Какое интерполирование точнее и почему – полиномом Лагранжа или кубическим сплайном?
6. В чём суть метода наименьших квадратов в задачах приближения функций?
7. Каков смысл коэффициента детерминации при построении регрессионных моделей?
8. Когда целесообразно использовать интерполяцию, а когда приближение?

**Вычисление определенного интеграла**

Для тех, кто не программирует, сделайте соответствующее расчётное задание с преподавателем в лаборатории.

Для тех, кто программирует, необходимо найти по методу Симпсона значение определенного интеграла



с точностью . Оценку точности осуществите по методу Рунге. Указать в каких местах и во сколько раз приходилось измельчать начальную “грубую” сетку интегрирования. Приведите рисунок функции  и полученной сетки интегрирования. Сделайте выводы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  | *a* | *b* |  |
| 1 |  |  |  | 0.001 |
| 2 |  | 0.5 | 0.8 | 0.0001 |
| 3 |  | 2 | 10 | 0.0002 |
| 4 |  | 0.5 | 5 | 0.001 |
| 5 |  |  |  | 0.0005 |
| 6 |  |  |  | 0.001 |
| 7 |  |  |  | 0.01 |
| 8 |  | 0 |  | 0.002 |
| 9 |  | -1 | 2 | 0.0001 |
| 10 |  | 0 |  | 0.005 |
| 11 |  |  |  | 0.002 |
| 12 |  | 0 |  | 0.001 |
| 13 |  | 0 | 25 | 0.00005 |
| 14 |  | 2 | 10 | 0.0001 |

***Контрольные вопросы***

1. Напишите составную формулу численного интегрирования методом прямоугольников.
2. Напишите составную формулу численного интегрирования методом трапеций.
3. Напишите составные формулы численного интегрирования методом парабол с полным шагом и половинчатым.
4. В чём суть метода Рунге для оценки точности численного интегрирования?
5. В чём суть метода Монте-Карло для численного интегрирования? В каких случаях он предпочтительнее квадратурных формул?

**Численное решение задачи Коши**

Решить задачу Коши

, .

Для тех, кто не программирует, сделайте это методом Эйлера в соответствующем расчётном задании с преподавателем в лаборатории.

Для тех, кто программирует, сделайте это методом Эйлера и Рунге-Кутта 4-го порядка на трёх сетках при *N* =10, 50, 500. Постройте графики решений для обоих методов на всех сетках. Сделайте выводы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |
| 1 |  | 2.5 | 1 | 10 |
| 2 |  | 0 |  |  |
| 3 |  | 1 | 0 | 3 |
| 4 |  | 2 | 1 | 3 |
| 5 |  | 10 | -2 | 2 |
| 6 |  | 0.5 | 0 | 5 |
| 7 |  | 0 | 0 | 10 |
| 8 |  | 10 | 0 | 10 |
| 9 |  | 2 | 1 | 5 |
| 10 |  | 0 | 1.5 | 5 |
| 11 |  | 1 | 5 | 50 |
| 12 |  | 0 | 1 | 5 |
| 13 |  | -1 | -10 | 10 |
| 14 |  | 1 | 0 | 1 |

***Контрольные вопросы***

1. Напишите формулу метода Эйлера. Какова точность этого метода?
2. Напишите формулу какого-либо метода Рунге-Кутта. Какова точность этого метода?
3. Как численно вычисляются правая, левая и центральная производные? Какая схема вычислений даёт наименьшую погрешность?
4. Как численно можно найти вторую производную?
5. Что такое явные и неявные конечно-разностные схемы решения дифференциальных уравнений? Что в них хорошего и плохого?
6. Что такое жёсткость системы обыкновенных дифференциальных уравнений? Физический смысл жёсткости?
7. Как решают задачу Коши в случае дифференциального уравнения высокого порядка?